

## Математика Coilgun.

### Содержание.

Введение. ....	1
1. Основные уравнения. ....	2
2. Нули и максимумы. ....	7
3. Соотношения для ненулевого начального тока в индуктивности. ....	11
4. Выражение электрических параметров цепи через геометрические характеристики катушки. ....	13
5. Список литературы. ....	18

### Введение.

В этой статье выводятся основные соотношения, описывающие поведение тока и напряжения в RLC-контуре одноступенчатого coilgun. На основе полученных закономерностей проанализированы несколько интересных частных случаев, встречающихся на практике (например, затухание тока в цепи полумостового coilgun с рекуперацией энергии). Для удобства восприятия все формулы приводятся в явном виде без использования комплексных чисел.

## 1. Основные уравнения.

Представим себе простой RLC-контур (см. рис. 1). В том случае, когда мы используем его для моделирования coilgun, он состоит из индуктивности ускоряющей катушки  $L$ , сопротивления  $R$  (сопротивление провода, которым намотана катушка в сумме с внутренним сопротивлением конденсатора, сопротивлением ключа  $K$  и паразитным сопротивлением соединительных проводов), и емкости накопительного конденсатора  $C$ . Остальными паразитными элементами цепи (типа межвитковой емкости катушки, индуктивности конденсаторов и т.д.), как показывает практика, можно пренебречь. Типовые значения  $R$ ,  $L$  и  $C$  для любительских coilgun находятся обычно в пределах, приведенных в табл. 1.

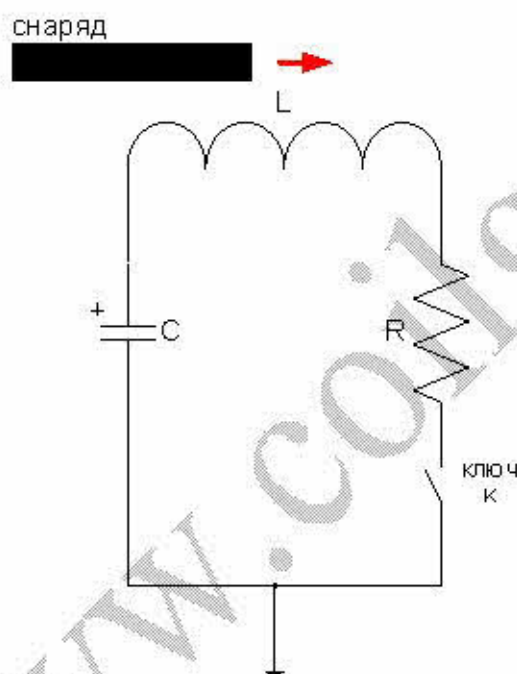


Рис. 1. Схема контура coilgun.

Параметр	Размерность	Диапазон значений
Активное сопротивление, $R$	Ом	0,1 - 5
Индуктивность, $L$	мкГн	10 - 1000
Емкость, $C$	мкФ	100 - 10000
Начальное напряжение, $U_C(0)$	В	50 - 1000

Табл. 1. Типовые диапазоны значений параметров любительских coilgun.

Попробуем найти аналитические выражения для силы тока  $i(t)$  и напряжения на емкости  $U_C(t)$ . Для этого запишем значения напряжения в контуре (второй закон Кирхгофа):

$$U_C(t) = U_L(t) + U_R(t) \quad (1)$$

где  $U_L(t) = L \times \{di(t)/dt\}$  – напряжение на индуктивности (в том случае, когда индуктивность постоянна, а меняется лишь ток),

$$U_R(t) = i(t) \times R \text{ (закон Ома).}$$

Далее, записывая выражение для емкости через заряд:

$$C = q(t)/U_c(t) \quad (2)$$

и дифференцируя (1) по времени, получим окончательное выражение для заряда в емкости:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0 \quad (3)$$

с помощью которого можно описать все интересующие нас процессы в контуре coilgun. Так, деля полученное решение на  $C$  в соответствии с выражением (2), получим выражение для  $U_c(t)$ , а дифференцируя его по времени, получим значение силы тока.

(3) - это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого зависит от начальных условий. Если мы хотим проанализировать динамику процессов в coilgun после открытия ключа, то надо записать:

$$\left. \begin{aligned} i(0) &= 0 \\ q(0) &= U_c(0) \times C \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

где  $U_c(0) = U_0$  - начальное значение напряжения на конденсаторе

Начав решать (3) с учетом (3a) известными методами теории дифференциальных уравнений, мы обнаружим, что решение распадается на два случая в зависимости от значения величины  $4L/R^2C$ . Запишем их сразу для значений напряжения на конденсаторе и тока в цепи. Если  $4L/R^2C > 1$ , то:

$$\begin{aligned} U_c(t) &= U_0 e^{-\frac{tR}{2L}} \left[ \cos\left(\frac{tR}{2L} \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}} \sin\left(\frac{tR}{2L} \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right) \right] \\ i(t) &= \frac{2U_0}{R} \frac{e^{-\frac{tR}{2L}}}{\sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}} \sin\left(\frac{tR}{2L} \sqrt{\frac{4L}{R^2C} - 1}\right) \end{aligned} \quad (4a)$$

Если же  $4L/R^2C < 1$ , то

$$U_c(t) = U_0 e^{-\frac{tR}{2L}} \left[ \operatorname{ch} \left( \frac{tR}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}} \operatorname{sh} \left( \frac{tR}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) \right]$$

$$i(t) = \frac{2U_0}{R} \frac{e^{-\frac{tR}{2L}}}{\sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}}} \operatorname{sh} \left( \frac{tR}{2L} \sqrt{1 - \frac{4L}{R^2 C}} \right) \quad (46)$$

где  $\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  – гиперболический синус,  $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  –

гиперболический косинус.

Здесь за положительное направление тока принято направление, при котором происходит разряд емкости.

Заметим, что аналитический вид функций (4а) и (4б) совершенно аналогичен, разница только в замене  $(k-1)$  на  $(1-k)$ , и геометрических синуса и косинуса на гиперболические. Забегая вперед, скажу, что эта аналогия полностью сохраняется и для всех остальных вычислений (например, энергии в цепи и т.д.), что позволяет выполнить расчет только для одного случая и распространить его на другой простой заменой геометрических функций на гиперболические.

Форма этих зависимостей приведен на рис. 2.

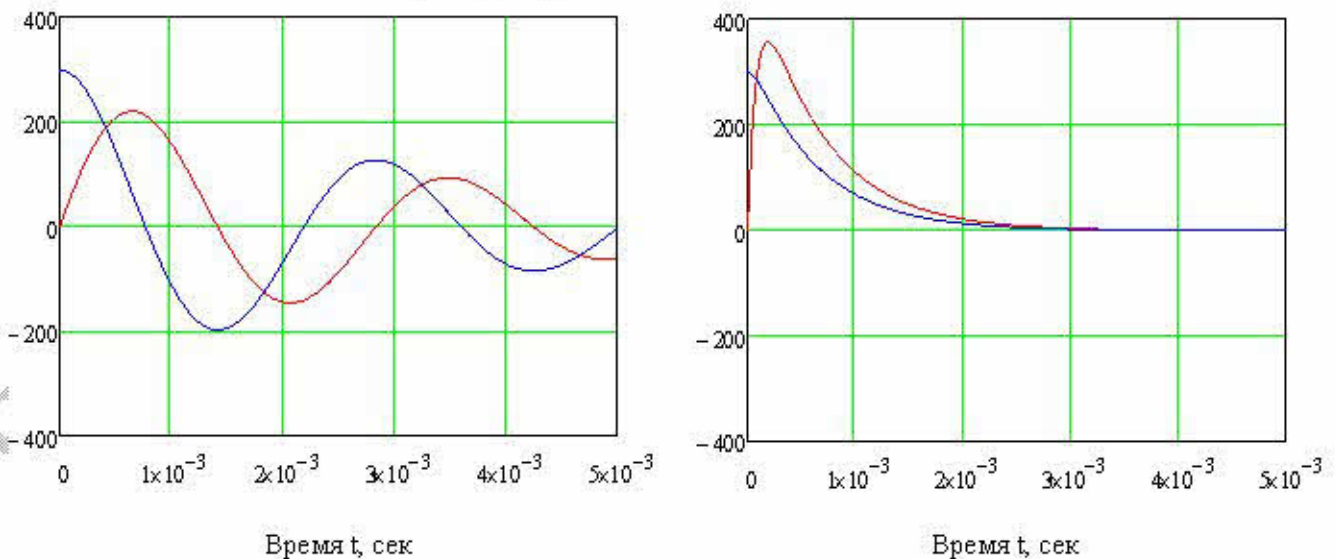


Рис. 2. Зависимости напряжения на емкости (—) и тока в цепи (—) от времени для недодемпфированной (слева) цепи ( $R = 0,3$  Ом,  $C = 400$  мкФ,  $L = 500$  мкГн) и передемпфированной (справа) цепи ( $R = 0,7$  Ом,  $C = 1000$  мкФ,  $L = 50$  мкГн). Начальное напряжение на емкости 300 В.

Как видно, случай (4а) соответствует периодическому разряду (т.е. в контуре происходит колебательный процесс, сопровождающийся перезарядкой емкости до отрицательного напряжения и сменой направления тока). В англоязычной теории цепей такой контур (для которого  $4L/R^2C > 1$ ) называется «недодемпфированным» («underdamped»).

Случай (4б) соответствует аperiodическому (затухающему) разряду, и в этом случае контур называется «передемпфированным» («overdamped»).

Попробуем немного упростить выражения (4). Для этого я введу обозначения «индуктивной постоянной времени»  $\tau_L = 2L/R$  (величина, обратная коэффициенту затухания в классической теории цепей), и «емкостной постоянной времени»  $\tau_C = RC/2$ . Тогда решения для аperiodического и периодического разряда запишутся как

$$U_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \left[ ch \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{1-k} \right) + \frac{1}{\sqrt{1-k}} sh \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{1-k} \right) \right]$$

$$i(t) = \frac{2U_0}{R} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{\sqrt{1-k}} sh \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{1-k} \right) \quad (5a)$$

$$U_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \left[ \cos \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1} \right) + \frac{1}{\sqrt{k-1}} \sin \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1} \right) \right]$$

$$i(t) = \frac{2U_0}{R} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_L}}}{\sqrt{k-1}} \sin \left( \frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1} \right) \quad (5b)$$

а условие перехода от одного к другому - просто как сравнение с единицей значения  $\tau_L/\tau_C = k$ , которое назовем «параметром передемпфированности», или просто k-параметром. Для цепей любительских coilgun, как следует из табл. 1, значения k могут варьироваться в широких пределах, т.е. на практике реализуются как недодемпфированные, так и передемпфированные контуры.

Собственно, на этом вывод основных уравнений для цепи coilgun закончен. Весь дальнейший анализ будет строиться на их анализе в различных частных случаях.

### Замечания:

1) Свойство напряжения на емкости принимать отрицательные значения в случае периодического разряда указывает на недопустимость недодемпфированного режима в coilgun, использующих электролитические конденсаторы. В реальной цепи никаких видимых последствий типа взрыва емкостей, скорее всего, не будет (я сам при своих ранних экспериментах с Thomson gun работал в таком режиме, а Евгений Васильев вообще использовал в своем Pskov-1100 [трюк](#) с перезарядом небольшого конденсатора до обратного напряжения для ускорения спада тока в катушке). Однако, в соответствии с [мнениями производителей электролитических конденсаторов](#), рекомендовать такой режим работы для силовых цепей не следует. Выходом из этой ситуации может быть шунтирование конденсатора обратносмещенным диодом, который предотвращает перезаряд емкости в обратную полярность, ограничивая отрицательное напряжение величиной 0,5..1 В (что для алюминиевых электролитических конденсаторов вполне допустимо). Однако, следует учесть, что при этом ток в цепи спадает уже не по уравнениям (5), а по простой экспоненциальной зависимости  $i(t) \sim \exp(-t \times R/L)$ , т.е. гораздо медленнее.

2) Определения индуктивной и емкостной постоянной времени не случайны. Во-первых, их введение позволяет существенно упростить вид формул, и в дальнейших расчетах они оказываются чрезвычайно удобными. Во-вторых, они в явном виде включают в себя и разделяют все константы, связанные с индуктивностью и емкостью цепи, что делает все расчеты интуитивно понятными с физической точки зрения. Например, условие передемпфированности записывается как  $k < 1$  и означает, что преобладание в цепи емкости не дает току поменять направление, либо сопротивление настолько велико, что ток затухает слишком быстро и не успевает принять периодический характер.

3) Следует понимать, что все полученные уравнения описывают идеальный RLC-контур, который может отличаться от реальных случаев. Так, индуктивность катушки coilgun меняется в процессе выстрела, поскольку в ней находится движущийся ферромагнитный сердечник, поэтому напряжение на индуктивности, на самом деле, имеет вид  $U_L(t) = L \times \{di(t)/dt\} + i(t) \times \{dL(t)/dt\}$  (это свойство я использовал для построения [индуктивного датчика](#) для coilgun). Кроме того, при прохождении тока в проводах выделяется омическое тепло, которое приводит к их нагреву и

изменению сопротивления. Наконец, емкость конденсаторов тоже непостоянна из-за различных эффектов (например, электрической адсорбции). Таким образом, ни один из параметров контура, вообще говоря, нельзя считать константой. Однако, как показывают [некоторые эксперименты](#), эти изменения в большинстве случаев не превышают нескольких процентов от начальных величин параметров, и для оценочных расчетов ими можно пренебречь.

4) С математической точки зрения интересен случай г. наз. «критического затухания», когда  $k = 1$ . Для него зависимости тока и напряжения от времени имеют совсем простой вид:

$$U_c(t) = U_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{\tau_L}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

$$i(t) = \frac{2U_0}{R} \frac{t}{\tau_L} e^{-\frac{t}{\tau_L}} \quad (5в)$$

Особенностью этого случая является то, что при этом обеспечивается максимально быстрое затухание тока в цепи, не переходящее, однако, в периодический разряд.

## 2. Нули и максимумы.

Попробуем исследовать процессы в `coilgun` при помощи полученных уравнений.

Для начала, найдем максимальные значения токов, развиваемые при разряде конденсатора на катушку, и моменты времени, когда эти максимумы имеют место. Решение этой задачи важно с практической точки зрения, поскольку позволяет правильно выбрать силовые ключи для конкретного контура – слишком «слабые» ключи сгорят, а выбранные с большим запасом по току будут чересчур дороги.

Итак, продифференцировав уравнения (5 а,б) по времени и приравняв производную нулю, получим значения моментов времени, когда токи достигают максимума:

$$t_{\max} = \frac{\tau_L}{\sqrt{k-1}} \operatorname{arctg}(\sqrt{k-1}) \quad (6a)$$

(для периодического разряда взят первый максимум тока, который имеет наибольшее значение, поскольку разряд затухающий)

$$t_{\max} = \frac{\tau_L}{\sqrt{1-k}} \operatorname{arth}(\sqrt{1-k}) \quad (6б)$$

Подставив эти аргументы в уравнения (5) рассчитаем величины максимальных токов и соответствующих им напряжений на емкости:

$$i_{\max} = i(t_{\max}) = \frac{2U_0}{R} \frac{e^{-\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{k-1}}{\sqrt{k-1}}}}{\sqrt{k-1}} \sin(\operatorname{arctg} \sqrt{k-1})$$

$$U_c(t_{\max}) = U_0 \frac{2e^{-\frac{\operatorname{arctg} \sqrt{k-1}}{\sqrt{k-1}}}}{\sqrt{k-1}} \sin(\operatorname{arctg} \sqrt{k-1}) \quad (7)$$

(для передемпфированного контура вид соотношений аналогичный с заменой функций на гиперболические).

Заметим, что  $U(t_{\max}) = i(t_{\max}) \times R$ , т.е. соотношение максимального тока и напряжения на емкости в этот момент подчиняется закону Ома с учетом только активного сопротивления контура  $R$ .

Интересно проанализировать, насколько сильно отличается максимальные токи от предельного значения тока в простом RC-контуре  $I_m = U_0/R$ , не учитывающего наличия в цепи катушки индуктивности. Для этого построим зависимость  $i_{\max}/I_m$  от параметра  $k$  (см. рис. 3).



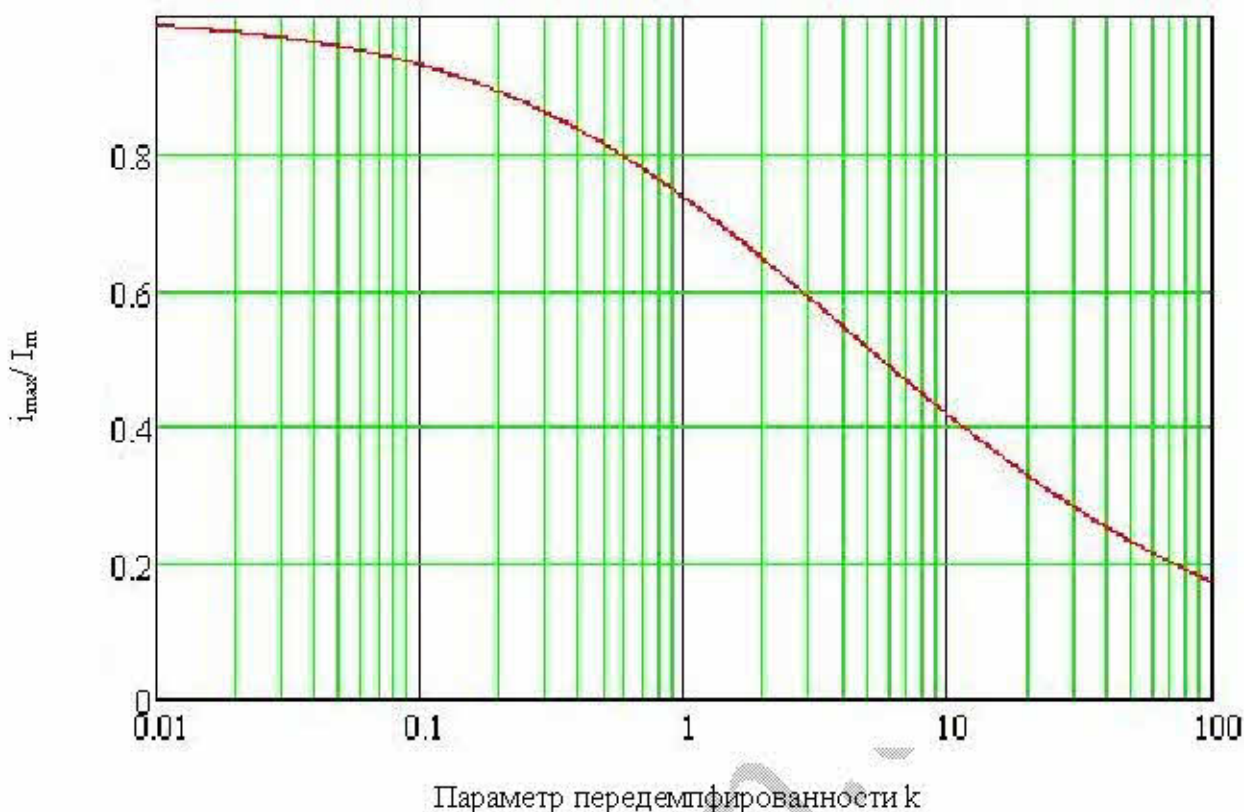


Рис. 3. Отношение максимального тока  $i_{\max}$ , развиваемого в RLC-контуре с начальным напряжением на емкости  $U_0$ , к току  $I_m = U_0/R$  (безиндуктивного) RC-контра.

Как видно, для сильно передемпфированных цепей отличие  $i_{\max}$  от  $I_m$  незначительно, для критического затухания  $i_{\max}/I_m \approx 0.73$ , для недодемпфированных цепей  $i_{\max}/I_m$  может принимать и меньшие значения. Однако, в реальных контурах величины  $k > 30$  встречаются редко, поэтому можно сказать, что оценка  $i_{\max} \approx U_0/R$  дает максимальное значение тока, завышенное не более, чем в 2-3 раза.

Для недодемпфированных цепей полезно оценить длительность положительной полуволны тока (т.е. время, в течение которого ток течет в одном направлении). Приравнявая значение тока в (5а) нулю и отбрасывая решение  $t = 0$ , получаем искомое значение:

$$t_0 = \frac{\pi \tau_L}{\sqrt{k-1}} \quad (8)$$

Значение напряжения на емкости в этот момент:

$$U(t_0) = -U_0 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{k-1}}} \quad (9)$$

Заметим, что напряжение отрицательно, т.е. конденсатор перезаряжается в обратной полярности. При  $k \rightarrow \infty$  (т.е. для сильно недодемпфированных цепей)  $U(t_0) = -U_0$  (конденсатор полностью перезаряжается), а  $t_0 = \pi\sqrt{\tau_L\tau_C}$ , т.е. получается хорошо известная формула Томсона для колебаний в LC-контуре.

#### Замечания:

1) Максимальный ток ключей, выбираемых для использования в конкретном контуре coilgun, не должен быть меньше значений, определяемых формулой (7).

Кроме того, можно оценить нагрев кристалла ключа через т. наз. «тепловое сопротивление»  $Z_{th}$ , которое связывает изменение температуры кристалла с выделяемой мощностью  $P$  через соотношение  $\Delta T = P \times Z_{th}$ . Поскольку мы имеем дело с импульсными процессами, то надо взять не стационарное, а динамическое (т.е. зависящее от длительности импульса  $\tau$ ) значение  $Z_{th}(\tau)$  — такие зависимости имеются в спецификациях на каждый силовой полупроводниковый прибор. Для приблизительных оценок можно использовать  $\tau = t_{max}$  в соответствии с формулой (6), а мощность оценить как  $P = i_{max} \times u$ , где  $u$  — падение напряжения на открытом ключе при токе  $i_{max}$ , которое можно найти в спецификациях на соответствующие приборы. В реальности, выделяемая на ключе мощность, конечно, зависит от времени, но в данном случае она аппроксимируется постоянной величиной. Если полученное значение  $\Delta T$  с учетом начальной температуры кристалла не превышает предельно допустимой величины для данного ключа, то его можно использовать в coilgun.

2) Если мы используем закрываемый ключ, то полученные формулы для токов и напряжений можно использовать для оценки предельного значения демпфирующего резистора  $R_d$  (подробнее о том, что это за резистор и зачем он нужен, см. [здесь](#)). Если ключ закрывается в момент времени  $t$ , то выброс напряжения на нем составит  $R_d \times i(t)$ , а суммарное напряжение на ключе  $U_c(t) + R_d \times i(t)$ . Это значение не должно превышать предельно допустимого напряжения для данного ключа (а лучше выбрать его с запасом процентов на 30).

Однако, если схема управления сработает неверно, либо время  $t$  окажется иным, нежели рассчитано изначально, то выброс напряжения

может превысить допустимые границы. Поэтому при расчете тока  $i(t)$  и определении соответствующего  $R_d$  неплохо взять максимальное значение тока для данной цепи  $i_{\max}$ . Это гарантирует ключ от повреждения при любых значениях длительности импульса (т.е. схема получается «дуракоустойчивой»).

3) Как показывают результаты моделирования в пакете FEMM (подробнее см. [здесь](#)), максимум эффективности coilgun с незакрываемыми ключами достигается в том случае, когда в нулевой точке (что это такое, см. [здесь](#)) значение (затухающего) тока составляет порядка 30% от  $i_{\max}$ . Исходя из этого, задавшись RLC-параметрами того или иного контура coilgun, и длительностью токового импульса, формулы (5а) и (5б) можно использовать для предварительной оценки КПД.

### 3. Соотношения для ненулевого начального тока в индуктивности.

Попробуем теперь решить основное уравнение для RLC-контура для случая, когда в момент открытия ключа К в индуктивности уже течет некий начальный ток  $i_0$  (пусть его направление соответствует увеличению заряда емкости в положительной полярности, см. рис. 4).

Этот случай описывает цикл демагнетизации в [обратноходовых преобразователях напряжения](#), которые широко используются для зарядки емкостей coilgun, а также в схемах рекуперации энергии ускоряющей катушки с помощью полумоста.

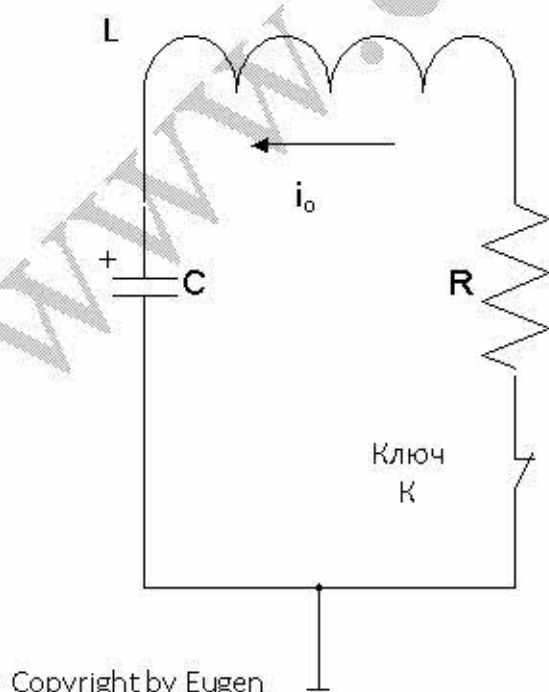


Рис. 4. Иллюстрация для случая RLC-контура с ненулевым начальным током.

Заменяя в начальных условиях (3а)  $i(0) = 0$  на  $i(0) = i_0$ , получим следующие решения для тока и напряжения на емкости (описан только случай недодемпфированной цепи):

$$U_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \left[ \cos\left(\frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1}\right) + \frac{1+km}{\sqrt{k-1}} \sin\left(\frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1}\right) \right] \quad (10)$$

$$i(t) = i_0 e^{-\frac{t}{\tau_L}} \left[ \cos\left(\frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1}\right) - \frac{1+m^{-1}}{\sqrt{k-1}} \sin\left(\frac{t}{\tau_L} \sqrt{k-1}\right) \right]$$

где введен параметр  $m = (\tau_C \times i_0) / (C \times U_0)$ , характеризующий величину начального тока по сравнению с остальными параметрами системы. В обратноходовых преобразователях напряжения величина  $m$  обычно намного меньше единицы, поскольку энергия передается в конденсатор маленькими порциями. В койлганах может быть и  $m > 1$ .

Графики зависимостей (10) в относительных единицах приведены на рис. 5 (здесь за положительное направление тока, в соответствии с рис. 4, принято направление, при котором емкость заряжается).

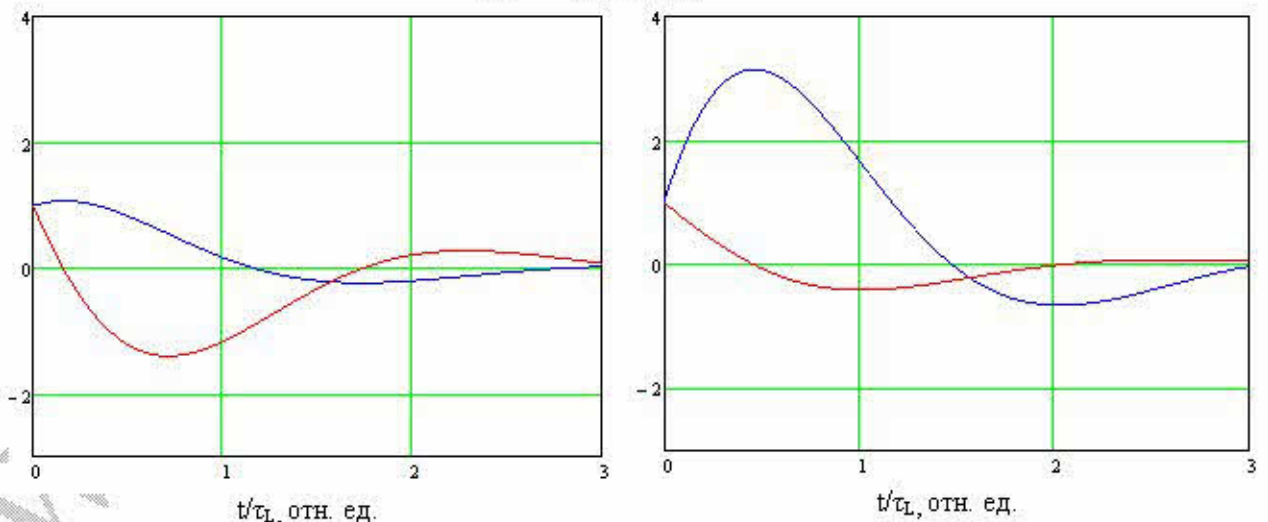


Рис. 5. Зависимости относительного напряжения  $U_c/U_0$  (—) и тока  $i/i_0$  (—) для недодемпфированной цепи с  $k = 5$  при значении параметра  $m = 0,2$  (слева) и 2 (справа).

Как видно, ток вначале продолжает течь в емкость, заряжая ее до напряжения, превышающего начальное, затем следует обычный

периодический разряд. Для малых  $m$  отношение пикового напряжения на емкости к начальному слабо отличается от единицы, но для  $m = 2$  заряд на емкости возрастает уже более чем в 3 раза. В заключение приведем значение параметра  $t/\tau_L$ , при котором заряд емкости начальным током заканчивается, и начинается ее разряд:

$$\frac{t}{\tau_L} = \frac{1}{\sqrt{k-1}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{k-1}}{1+m^{-1}} \right\} \quad (11)$$

Эта величина описывает длительность процесса затухания тока во вторичной обмотке обратноходовых преобразователей и в ускоряющей катушке coilgun при использовании полумостовой схемы.

#### 4. Выражение электрических параметров цепи через геометрические характеристики катушки.

Иногда бывает необходимо как-нибудь оценить параметры RLC-контура, а проведение электрических измерений затруднительно - например, отсутствуют специализированные RLC-метры. Особенно это касается индуктивности и сопротивления, поскольку конденсаторы в любительских coilgun используются стандартные, а у них емкость указывается на корпусах. В этом случае можно попробовать произвести расчет, отталкиваясь от геометрических характеристик катушки и намоточного провода, для измерений которых достаточно простых инструментов.

Для начала, используем известную формулу Уилера для индуктивности:

$$L = 0,08 \cdot \frac{D_{cp}^2 N^2}{3D_{cp} + 9l + 10t} \quad (12)$$

где  $L$  – индуктивность, мкГн  
 $D_{cp}$  – средний диаметр катушки, см  
 $l$  – длина обмотки, см  
 $t$  – толщина обмотки, см  
 $N$  – количество витков (см. рис. 6).

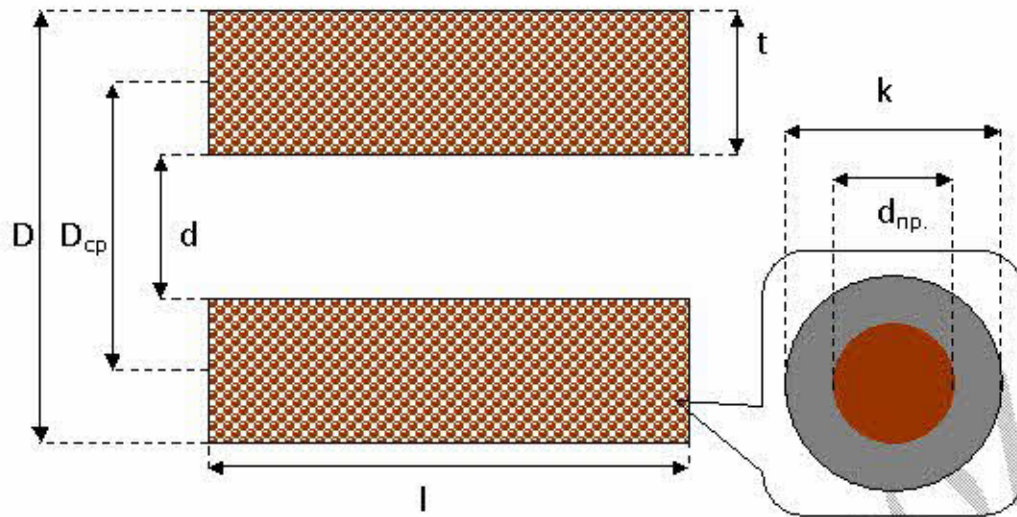


Рис. 6. Схема обозначений геометрических характеристик катушки и провода.

Используя в качестве переменных наружный диаметр  $D$  и внутренний диаметр катушки  $d$  (если провод намотан прямо на ствол coilgun, то это будет просто внешний диаметр ствола), из (12) легко получить:

$$L = 0,04 \cdot \frac{(D + d)^2 N^2}{13D + 18l - 7d} \quad (13)$$

Величину  $N$  можно оценить через геометрию катушки, зная толщину провода  $k$  (считаем, что провод намотан без зазоров - виток к витку):

$$N = \frac{(D - d)l}{2k^2} \quad (14)$$

Итого, для индуктивности получаем:

$$L = \frac{0,01}{k^4} \cdot \frac{(D + d)^2 (D - d)^2 l^2}{13D + 18l - 7d} \quad (15)$$

Теперь перейдем к сопротивлению. Для его расчета надо умножить длину провода на площадь сечения  $S = \pi d_{\text{пр.}}^2 / 4$  и удельное сопротивление  $\rho$  (которое, например, для меди равно  $1,75 \cdot 10^{-6}$  Ом·см). Длину провода оценим через количество витков  $N$  по ф-ле (14) и средний диаметр одного витка  $D_{\text{ср}}$ . Тогда общая длина провода в катушке будет

$$l_{\text{пр.}} = \frac{\pi(D^2 - d^2)l}{4k^2} \quad (16)$$

Вводя отношение диаметра провода без изоляции к диаметру провода в изоляции  $a = d_{\text{пр.}}/k$ , получим окончательно для сопротивления:

$$R = \frac{\rho(D^2 - d^2)a^2l}{d_{\text{пр.}}^4} \quad (17)$$

Деля (15) на (17), получим выражение для  $\tau_L$ :

$$\tau_L = \frac{0,02a^2(D^2 - d^2)l}{\rho(13D + 18l - 7d)} \quad (18)$$

Здесь  $\tau_L$  выражено в микросекундах,  $\rho$  – в Ом·см, а все геометрические размеры – в см.

Как видно, мы пришли к интересному выводу – индуктивная постоянная не зависит от диаметра провода, которым намотана катушка, а определяется лишь ее геометрией.

Зафиксируем внутренний диаметр катушки  $d$  и попробуем изобразить, как меняется удельная величина  $\omega = \tau_L \rho / a^2 d^2$  в зависимости от внешнего диаметра и длины катушки (см. рис. 7).

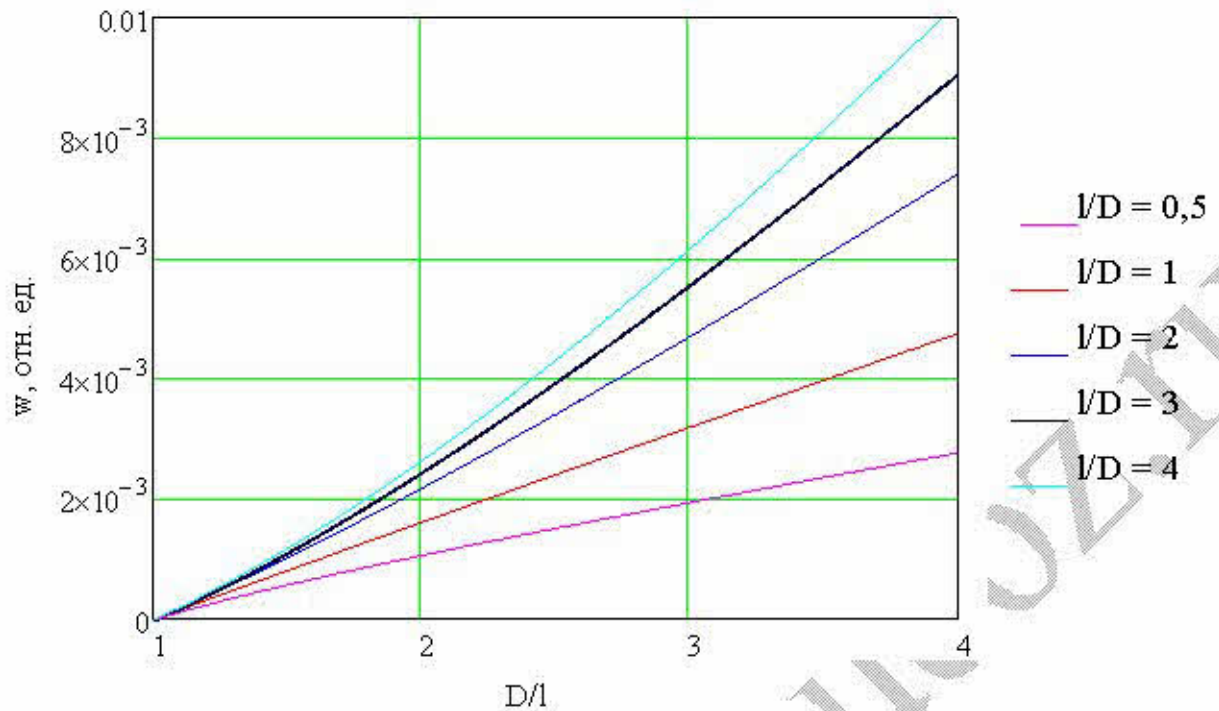


Рис. 7. Зависимость удельной индуктивной постоянной  $\omega = \frac{\tau_L \rho}{\alpha^2 d^2}$  от диаметра и длины катушки.

Как видно, значения индуктивной постоянной монотонно возрастают с увеличением как диаметра, так и длины катушки. То есть, из двух катушек, имеющих равную длину, внутренний диаметр и сопротивление обмотки, но разный внешний диаметр, большую индуктивность будет иметь более «толстая» катушка.

В завершение этого раздела проанализируем с помощью полученных формул так называемую «идеальную» катушку, у которой внутренний диаметр равен удвоенной длине, а внешний трехкратно превышает внутренний. Особенностью такой катушки является то, что она создает (в точке, лежащей в ее геометрическом центре) максимальное магнитное поле среди всех прочих конфигураций обмоток, имеющих такое же сопротивление провода [2]. И хотя было показано, что такая катушка не всегда является оптимальной для использования в койлгане, многие гауссостроители к ней, что называется, «неравнодушны», поэтому возьмем ее в качестве примера.

Подставляя в (18)  $l = 2d$ ,  $D = 3d$ , получим простую формулу для индуктивной постоянной катушки.



$$\tau_{Lид} = 1,18 \cdot 10^{-3} \frac{a^2 l^2}{\rho} \quad (18a)$$

То есть для «идеальной» катушки длиной 2 см из медного провода, уложенного с плотностью 0,8, индуктивная постоянная будет около 1,72 мс.

Замечания:

1) В расчетах по формулам (12-18) считается, что провод уложен концентрическими слоями (в аксиальном сечении катушки они будут выглядеть как плоскопараллельные слои), занимающими весь объем обмотки. На практике это не так, поскольку, например, провод может проваливаться между витками предыдущего слоя (см. рис. 9). Кроме того, на длине катушки никогда не укладывается точно целое число витков, поэтому намотка, как правило, имеет некоторые дефекты на краях. Наконец, провод может быть неровный, что препятствует плотному прилеганию витков друг к другу.

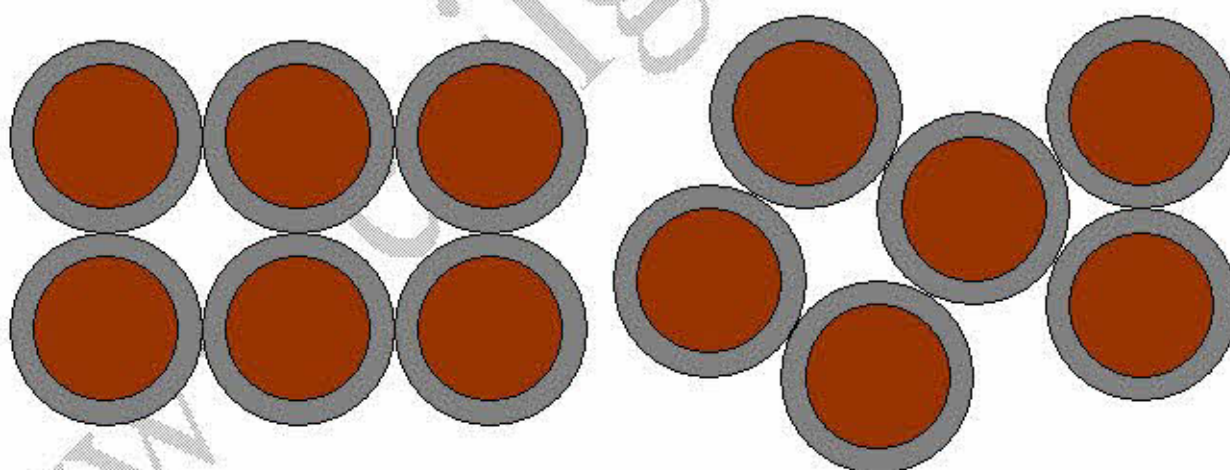


Рис. 9. Идеальная намотка плоскопараллельными слоями (слева), реальная намотка с дефектами геометрии (справа).

Поэтому, строго говоря, значение параметра  $a$  является эмпирическим и включает в себя не только толщину изоляции провода как таковую, но учитывает все вышеуказанные особенности намотки.

Конкретную величину  $a$  можно определить из формулы (17), измерив сопротивление и геометрические параметры катушки, намотанной проводом с известной толщиной жилы ( $d_{\text{пр}}$ ). Так, для намотки проводом в однослойной эмалевой изоляции у меня получались значения  $a$  в диапазоне 0,8 ... 0,85.

2) Используемая формула (12) является аналитическим приближением для более общей формулы расчета индуктивности, которая может быть записана следующим образом:

$$L = f(d, D, l) \cdot N^2 \quad (19)$$

где  $f(d, D, l)$  – некий форм-фактор, зависящий только от геометрических параметров катушки.

С другой стороны, сопротивление провода пропорционально длине провода и обратно пропорционально площади проводника, что также приводит к квадратичной зависимости от количества витков:

$$R = \frac{4\rho\pi D_{\text{ср}} N}{S} \sim \frac{N}{k^2} \sim \frac{N}{\frac{t \cdot l}{N}} \sim N^2 \quad (20)$$

(см. обозначения на рис. 6, отброшены все множители, не зависящие от толщины провода).

Таким образом, независимо от конкретного вида используемой формулы для расчета индуктивности, соотношение  $L/R$  не зависит от толщины проводника или числа витков, и все выводы п. 4 касательно поведения  $\tau_L$  в зависимости от геометрии катушки остаются справедливыми.

## 5. Список литературы.

[1]. <http://coil32.narod.ru/index.html>

[2]. В.Р.Карасик. «Физика и техника сильных магнитных полей», М., «Наука», 1964 г.